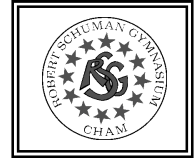


M 9.1

Quadratwurzeln



\sqrt{a} ist diejenige nicht negative Zahl, die quadriert a ergibt: $(\sqrt{a})^2 = a$

Die Zahl a unter der Wurzel heißt **Radikand**:

\sqrt{a}

Quadratwurzeln sind nur für positive Zahlen definiert:

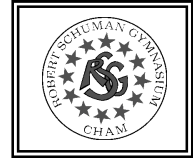
$$a \geq 0$$



$$\sqrt{25} = 5; \quad \sqrt{81} = 9; \quad \sqrt{0,25} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0,5; \quad \sqrt{0,0081} = 0,09; \quad \sqrt{-4} = \text{⚡}$$

M 9.2

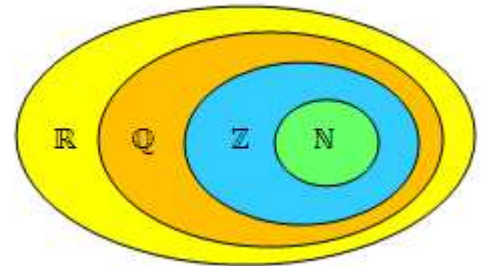
Reelle Zahlen



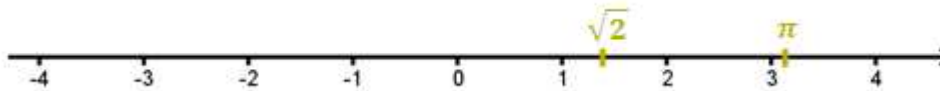
Jeder unendliche nicht periodische Dezimalbruch stellt eine **irrationale Zahl** dar.

$\sqrt{2}$; $-\sqrt{7}$; π ; 0,12345 ...

Die rationalen und die irrationalen Zahlen bilden zusammen die **Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen**.

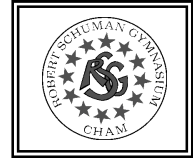


Jede reelle Zahl besitzt einen Bildpunkt auf der Zahlengeraden und jedem Punkt auf der Zahlengeraden entspricht genau eine reelle Zahl.



M 9.3

Rechenregeln für Wurzeln



Multiplikationsregel: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

Divisionsregel: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

Vorsicht: Man darf Wurzeln nicht auf die einzelnen Glieder einer Summe verteilen!

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

.	✓
:	✓
+	⚡

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6; \quad \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}} = \sqrt{\frac{8}{18}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

Anwendungen:

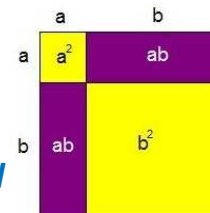
- 1) Teilweises Radizieren: $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
- 2) Nenner rational machen: $\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$
- 3) Summen und Differenzen von Wurzeln: $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

M 9.4

Binomische Formeln



1. Binomische Formel: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ *Plus-Formel*
2. Binomische Formel: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ *Minus-Formel*
3. Binomische Formel: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ *Plus-Minus-Formel*



$$(5x + y)^2 = 25x^2 + 10xy + y^2; \quad (0,5a - 1)^2 = 0,25a^2 - a + 1; \quad (1 - m)(1 + m) = 1 - m^2$$

Anwendungen:

- 1) Ausmultiplizieren (Produkte werden zu Summen):

$$(3 + 2\sqrt{3})^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3} + (2\sqrt{3})^2 = 9 + 12\sqrt{3} + 12 = 21 + 12\sqrt{3}$$

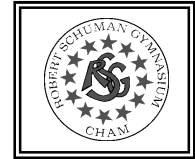
- 2) Faktorisieren (Summen werden zu Produkten):

$$9x^2 - 1 = (3x)^2 - 1^2 = (3x + 1)(3x - 1)$$

$$\sqrt{4 + x^2 - 4x} = \sqrt{(2 - x)^2} = |2 - x|$$

M 9.5

n-te Wurzel



$\sqrt[n]{a}$ ist diejenige nicht negative Zahl, deren n-te Potenz a ergibt: $(\sqrt[n]{a})^n = a$

Die Zahl n heißt **Wurzelexponent**:

→ $\sqrt[n]{a}$

n-te Wurzeln sind nur für positive Zahlen definiert:

$a \geq 0$



$$\sqrt[3]{8} = 2; \quad \sqrt[4]{81} = 3; \quad \sqrt[5]{3125} = 5; \quad \sqrt[4]{0,0081} = 0,3; \quad \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$$

Die Gleichung $x^n = a$ kann zwei, eine oder keine Lösung haben:

	n gerade	n ungerade	
$a > 0$	$L = \{-\sqrt[n]{a}; \sqrt[n]{a}\}$	$L = \{\sqrt[n]{a}\}$	$x^4 = 2 \Rightarrow L = \{-\sqrt[4]{2}; \sqrt[4]{2}\}$ $x^3 = -2 \Rightarrow L = \{-\sqrt[3]{2}\}$
$a = 0$	$L = \{0\}$	$L = \{0\}$	
$a < 0$	$L = \{\}$	$L = \{-\sqrt[n]{a}\}$	

M 9.6

Potenzen mit rationalen Exponenten



Für $a > 0$ gilt: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2; \quad 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 2^2 = 4; \quad 9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}; \quad 9^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{9^3}} = \frac{1}{27}$$

Rechenregeln

Multiplizieren bei gleicher Basis:

Exponenten addieren

$$\frac{1}{4^6} \cdot \frac{1}{4^3} = \frac{1}{4^{6+3}} = \frac{1}{4^9} = 2$$

Multiplizieren bei gleichem Exponenten

$$5^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} = (5 \cdot 8)^{\frac{1}{3}} = 40^{\frac{1}{3}} = 2^3 \sqrt{5}$$

Potenzieren von Potenzen

Exponenten multiplizieren

$$\left(8^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} = 8^{\frac{2}{3} \cdot (-\frac{1}{2})} = 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

Dividieren bei gleicher Basis

Exponenten subtrahieren

$$4^{-\frac{1}{3}} : 4^{\frac{1}{6}} = 4^{-\frac{1}{3} - \frac{1}{6}} = 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Dividieren bei gleichem Exponenten

$$2^{\frac{1}{3}} : 54^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2}{54}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

Summen und Differenzen

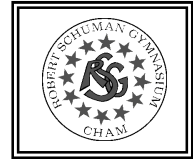
Zusammenfassen **nur bei gleichartigen Termen** möglich!

$$7a^{\frac{1}{3}} - 3a^{\frac{1}{3}} = 4a^{\frac{1}{3}}$$

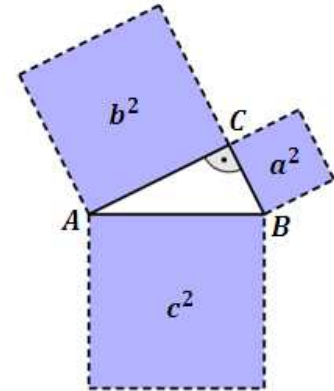


M 9.7

Satz des Pythagoras



In jedem rechtwinkligen Dreieck haben die Quadrate über den Katheten zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse.



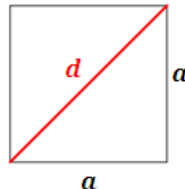
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Anwendungen:

Diagonale im Quadrat

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

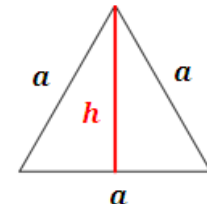
$$\Leftrightarrow d = a\sqrt{2}$$



Höhe im gleichseitigen Dreieck

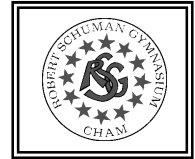
$$h^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow h^2 = \frac{3}{4}a^2 \quad \Leftrightarrow h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$



M 9.8

Kathetensatz und Höhensatz



Höhensatz

In jedem rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über der Höhe den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten.

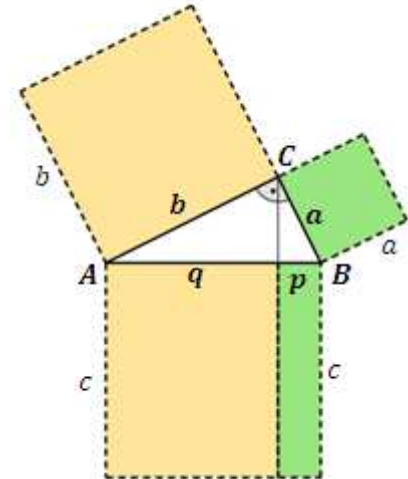
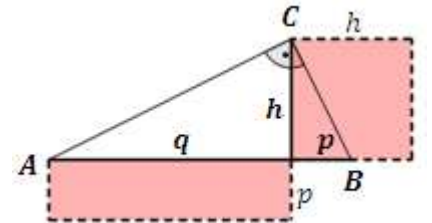
$$h^2 = p \cdot q$$

Kathetensatz

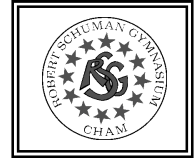
In jedem rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über einer Kathete den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.

$$a^2 = c \cdot p$$

$$b^2 = c \cdot q$$



Quadratische Funktionen: Die Parabel



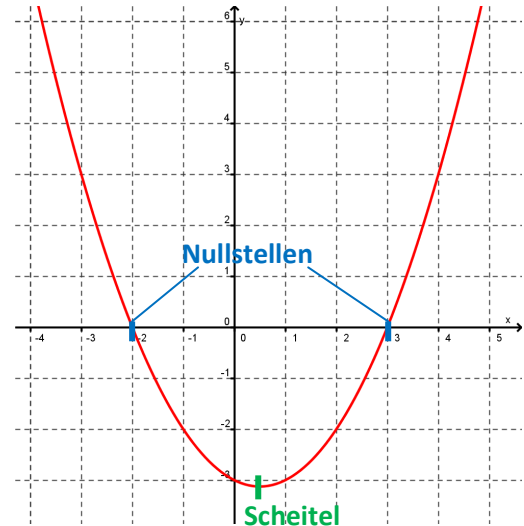
Der Graph einer quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ heißt **Parabel**.

Die Parabel ist für

- $a > 0$ nach oben geöffnet.
- $a < 0$ nach unten geöffnet.

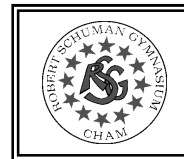
Ist $a = 1$ oder $a = -1$ heißt der Graph **Normalparabel**.

Der tiefste bzw. höchste Punkt heißt **Scheitel** der Parabel.



M 9.10

Quadratische Funktionen: Scheitelform



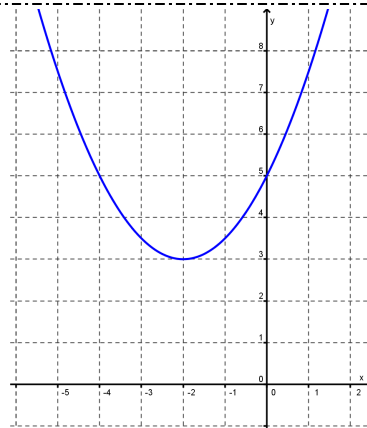
Jede quadratische Funktion lässt sich durch **quadratische Ergänzung** in die **Scheitelpunktform** $f(x) = a(x - d)^2 + e$ bringen.

⇒ Scheitel $(d|e)$

für $a > 1$ enger als die Normalparabel
für $a < 1$ weiter als die Normalparabel

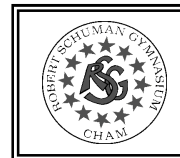
Um d in x -Richtung verschoben
Um e in y -Richtung verschoben

$$\begin{aligned} f(x) &= 0,5x^2 + 2x + 5 \\ f(x) &= 0,5(x^2 + 4x + 10) = \\ &= 0,5(x^2 + 4x + \mathbf{2^2 - 2^2} + 10) = \text{Quadratische Ergänzung} \\ &= 0,5[(x + 2)^2 - 2^2 + 10] = \\ &= 0,5[(x + 2)^2 + 6] = \\ &= 0,5(x + 2)^2 + 3 \\ &\Rightarrow S(-2|3) \end{aligned}$$



M 9.11

Quadratische Gleichungen



Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$ heißen **quadratische Gleichungen**.

- Ihre Lösungen sind die Nullstellen der zugehörigen quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- Sind x_1 und x_2 die Lösungen, so kann man die Funktion schreiben als $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (Linearfaktorzerlegung)

Lösungsformel („Mitternachtsformel“):

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



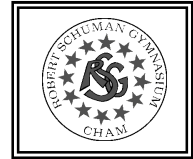
Der Term unter der Wurzel $b^2 - 4ac$ heißt **Diskriminante D** . Er gibt an, wie viele Lösungen die Gleichung besitzt.

$D > 0$	zwei Lösungen
$D = 0$	eine Lösung
$D < 0$	keine Lösung

$$3x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm 7}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{12}{6} = 2, x_2 = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

M 9.12

Mehrstufige Zufallsexperimente



Ein Zufallsexperiment, das aus mehreren Teilexperimenten besteht, nennt man **mehrstufiges Zufallsexperiment**.



1. Pfadregel

Die **Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses** ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

2. Pfadregel

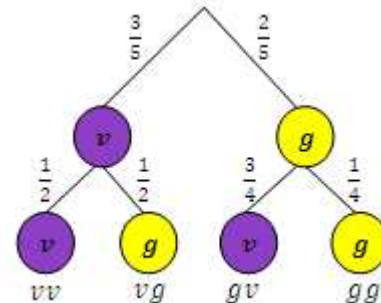
Die **Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses** ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten für die zugehörigen Ergebnisse.

Aus einer Urne mit zwei gelben und drei violetten Kugeln werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

$$\Omega = \{gg, gv, vg, vv\}$$

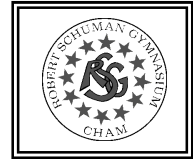
$$P(vv) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

$$P(\text{zwei gleiche Kugeln}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{5}$$



M 9.13

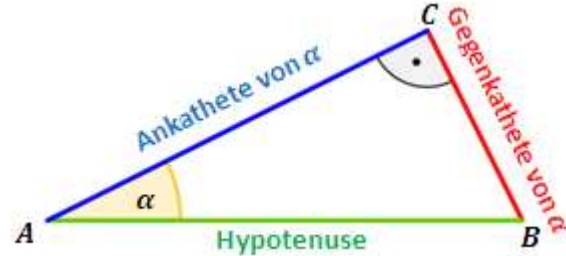
Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck



$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$$



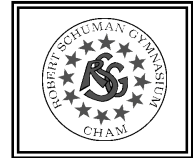
Beziehungen: $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$; $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$; $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$; $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

Werte:

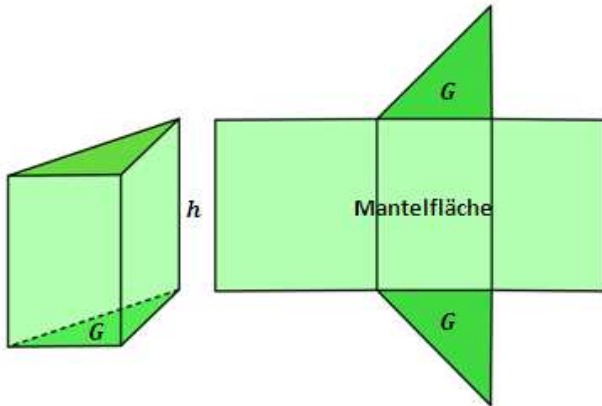
α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
<i>Merkhilfe</i>	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$
$\cos \alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	existiert nicht

M 9.14

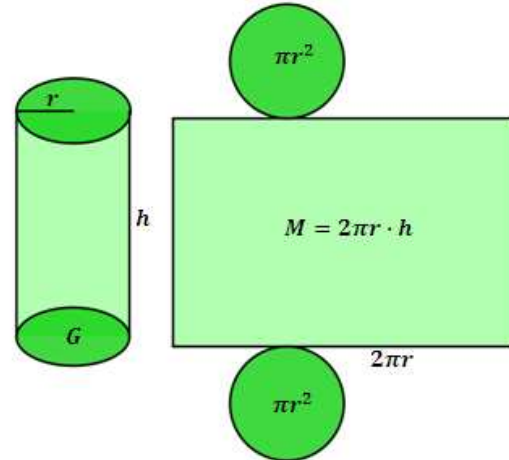
Prisma und Zylinder



Prisma



Zylinder



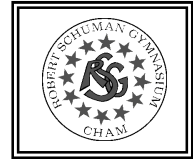
Volumen: $V = \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}$
Oberfläche: $O = 2G + M$

$$V_{\text{Prisma}} = G \cdot h$$

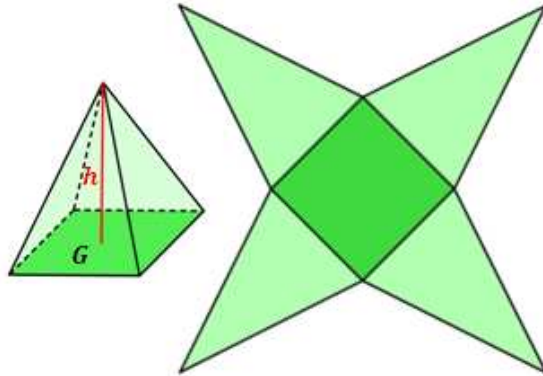
$$V_{\text{Zylinder}} = G \cdot h = \pi r^2 \cdot h$$
$$O_{\text{Zylinder}} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h$$

M 9.15

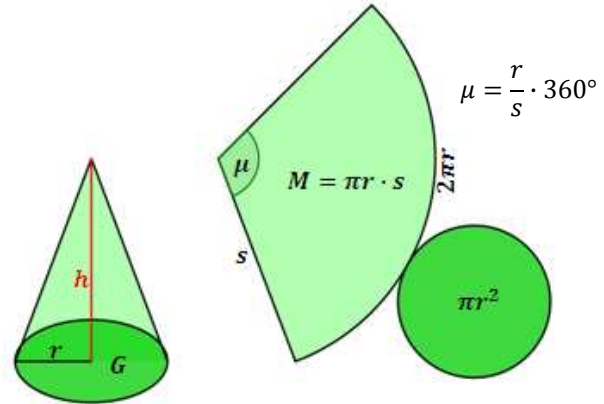
Pyramide und Kegel



Pyramide



Kegel



Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}$
Oberfläche: $O = G + M$

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$
$$O_{\text{Kegel}} = \pi r^2 + \pi r \cdot s$$